університету біоресурсів і природокористування України. Сер. : Економіка, аграрний менеджмент, бізнес. – 2013. – Вип. 181(3). – С. 213-218

8. Пантелеєв В.П. Внутрішній аудит / В.П. Пантелеєв, М.Д. Корінько. – К.: Держ. академія статистики обліку та аудиту Держ. Комітету статистики України. – 2006. – 247 с.
9. Редько О.Ю. Аудит та безпека бізнесу: [практ. посібник] / О.Ю. Редько, О.Б. Рижакова, К.О. Редько. – К.: ДП «Інформаційно-аналітичне агенство», 2007. – 177 с.
10. Скорба О.А. Внутрішній аудит – запорука ефективного управління підприємством / О.А. Скорба // [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.economy.nayka.com.ua/&z=1947
11. Чуєнков А.Є. Сутність та організація служби внутрішнього аудиту / А.Є.Чуєнков // Економічний часопис - XXI. – 2010, – №7-8, – С. 38-42.

Одержано 12.05.16

УДК 539.3

Л.М. Кривоблоцька, доц., канд. ф.-м. наук
Кіровоградський національний технічний університет

Задача про рухи в системі двох тіл

При використанні методу степеневих рядів для знаходження шуканих розв’язків, для покращення їх збіжності, аналітичного продовження необхідно робити певної аналітичної структури заміни незалежної змінної; для покращення ефективності (в певному сенсі) тієї чи іншої заміни слід у формулу заміни вводити наперед довільні параметри; варіюючи вибором величини цих параметрів, можна покращувати збіжність рядів.
потенціальні сили, рівняння руху, сингулярність, регуляризація

Задача з небесної механіки і її можна розглядати як частинний варіант задачі про рух трьох тіл, що взаємно притягуються (відштовхуються).

Наведемо схематично методи постановки і розв’язку задачі про рух двох тіл на основі так званих *KS* – перетворення.

В основу фрагментарного викладу деяких відомих результатів використана монографія [1].

Розглядаємо тіла маси M і m ($M>m$); перше тіло називають центральним; в його центрі мас розміщують початок декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$. Припускається, що по відношенню до цього тіла рухається тіло m, яке трактують як матеріальну точку. Ця точка рухається під дією сили тяжіння $K^2\dfrac{M\,m}{r^2}$, де K^2 – гравітаційна стала; r – віддаль між центрами мас тіл (рис.1).

Ставиться задача: вивести рівняння руху тіла m і знайти закон руху під дією вказаної сили притяжіння і деяких зовнішніх (потенціальних і непотенціальних) сил.

Такого типу задачі мають теоретичне і практичне значення: при дослідженні законів руху Місяця навколо Землі, штучного супутника навколо Землі тощо.

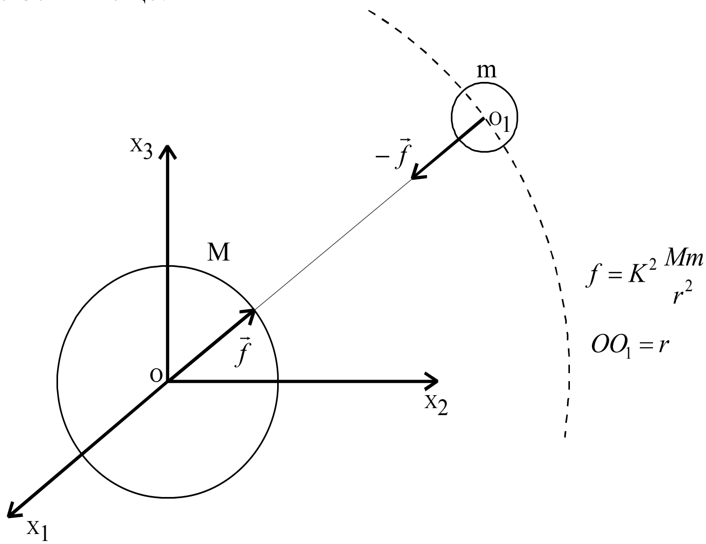

Рисунок 1 – Рух матеріальної точки навколо притягуючого центра мас

Якщо $\vec{x}=\overrightarrow{O\,O_1}$ – радіус-вектор точки m як функція часу, то згідно [1] маємо векторне рівняння руху

$$\vec{x} + \frac{K^2}{r^2}\vec{x} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}} + \vec{P}, \tag{1}$$

тут V – потенціал зовнішніх сил;

$\vec{P}$ – складова зовнішніх непотенціальних сил.

Вказані зовнішні сили можна трактувати як результат дії від третього тіла, яке знаходиться на значній віддалі від розглядуваних двох тіл (наприклад, Сонце).

До рівняння (1) приписують рівняння енергії:

$$h_K = \frac{K^2}{r} - \frac{v^2}{2}, \quad h = h_k - V, \tag{2}$$

і закон зміни енергії

$$\dot{h}_K = \left(\frac{\partial V}{\partial \vec{x}}, \dot{\vec{x}}\right) - \left(\vec{P}, \dot{x}\right); \tag{3}$$

$$\dot{h} = -\frac{\partial V}{\partial t} - \left(\vec{P}, \dot{\vec{x}}\right), \tag{4}$$

вираз h_K – називають енергією системи в розумінні Кеплера.

З рівнянь (1) можна одержати три скалярні рівняння руху, проектуючи (1) на осі системи координат Ox,x_2x_2. Враховуючи те, що $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, одержимо три скалярних істотно нелінійних диференціальних рівняння для визначення функцій $x_i(t)$ $\left(i = \overline{1, 3}\right)$. Аналогічний розв’язок цих рівнянь можна одержати лише у деяких частинних випадках; на сучасному етапі широко застосовують чисельні методи. Ефективному застосуванню цих методів протистояла довгий час особлива точка $r = 0$ і вона приносила ряд клопотів науковим дослідникам на протязі багатьох століть.

Вчені з теоретичної астрономії Е.Штіфель, Г.Шейфеле, Р.Кустаанхеймо вирішили змінити підхід до розв’язку задачі про рух двох тіл. Загальна ідея полягала в тому, що необхідно певними замінами, перетвореннями представити основне рівняння (1) у нових залежних і незалежних змінних у такому вигляді, щоб “зникли” всі особливості (сингулярності); потім застосувати вже відомі чисельні методи для інтегрування модифікованого рівняння руху.

Алгоритм одержання модифікованого рівняння здійснюється в два етапи. На першому етапі замість змінного *t* вводиться нова величина *S* згідно формули

$$\partial t = r \, \partial s \quad \Rightarrow \quad t = \int r \, \partial s \tag{5}$$

Як бачимо, тут підхід близький до методу К.Зундмана в проблемі трьох тіл.

В результаті основні рівняння, співвідношення (1) – (4) перетворюються до виду

$$r \vec{x}'' - r \vec{x}' + K^2 \vec{x} = r^3 \left(-\frac{\partial V}{\partial \vec{x}} + P \right), \tag{6}$$

$$h_K = \frac{K^2}{r} - \frac{1}{2r^2} \left| \vec{x}' \right|^2, \; h = h_K - V \tag{7}$$

Тут “ ′ “ означає похідну по *s*.

Бачимо, що після першого етапу сингулярність $r = 0$ ще не зникає. Тому вказані автори запропонували застосувати вже для (6), (7) другий етап – так зване *KS* – перетворення. Для цього вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ доповнили до чотирьох вимірного вектора, ввівши нульову компоненту, тобто

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, 0).$$

Тоді замість шуканих функцій x_1, x_2, x_3 вводяться нові шукані функції $u_k(s, \ldots)\left(k = \overline{1, 4}\right)$. Далі, ними була запропонована оригінальна *KS* – матриця, яка ортогональна в певному сенсі:

$$L(\vec{u}) = \begin{Vmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{Vmatrix}. \tag{8}$$

Після цього вводиться перетворення на основі *KS* – матриці

$$\vec{x} = L(\vec{u})\,\vec{u} \tag{9}$$

Використовуючи ряд властивостей *KS* – матриць, проводячи ряд обчислень і перетворень, було одержано рівняння руху у нових змінних:

$$\vec{u}'' + \frac{h_K}{2}\,\vec{u} = \frac{|\vec{u}|^2}{2}\left(-\frac{\partial V}{\partial u} + L^T \vec{P}\right), \tag{10}$$

$$h'_K = \left(\frac{\partial V}{\partial \vec{u}}, \vec{u}'\right) - 2\left(\vec{u}', L^T \vec{P}\right),\ t' = (\vec{u}, \vec{u}). \tag{11}$$

З розгляду (10) бачимо, що це рівняння вже не містить сингулярних доданків і до його розв’язку можна застосувати різного типу обчислювальні алгоритми, що і було зроблено рядом авторів [3].

З аналізу наведеної задачі випливають такі висновки:

1) сингулярності можуть виникати вже на початку постановки задачі і мати явно виражений механічний або математичний зміст; при застосуванні ітераційних методів порядки їх істотньо зростають;

2) сингулярні доданки (множники) можна нівеліювати шляхом заміни залежних і незалежних змінних, в результаті чого одержуємо нові рівняння без сингулярних множників;

3)вказаний метод можна з успіхом застосовувати тоді, коли вихідна система рівнянь буде симетричною в певному сенсі.

Список літератури

1. Штифель Е, Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика: Пер. с англ., М., 1975. – 303 с.
2. Тихонов А.Н. Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье. // Докл. АН СССР. – М.: Наука, 1964. т. 156, № 2, с. 268-271
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Физматгиз, 1986. – 287 с.

Одержано 22.05.16